Tentamen Talen en Automaten, 23 augustus 2006

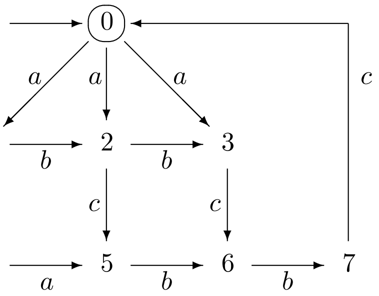
Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek tentamen.

Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen.

Formuleer kort en zakelijk, scherp en zorgvuldig, met steekhoudende argumenten voor de correctheid van je beweringen. Werk netjes. Schrijf duidelijk leesbaar.

Opgave 1 (20 %). Beschouw de nondeterministische eindige automaat A over het alfabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ gegeven in de figuur:

A :



De toestanden zijn genummerd 0 tot en met 7. Toestand 0 is de starttoestand en de enige accepterende toestand.
(a) Zet de automaat A volgens het standaardalgoritme om in een deterministische eindige automaat B die dezelfde taal accepteert. Hoeveel bereikbare toestanden heeft B?
(b) Bepaal (bv. op grond van het resultaat van (a)) een reguliere expressie voor de taal van de automaten A en B.

Opgave 2 (16 %). Beschouw de taal L_2 over het alfabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, die bestaat uit alle strings met oneven lengte waarvan het middelste symbool een 2 is.
(a) Laat zien dat de taal L_2 contextvrij is.
(b) Formuleer het Pomplemma voor *reguliere* talen.
(c) Bewijs dat de taal L_2 niet regulier is.

Opgave 3 (20 %). Beschouw de stapelautomaat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z)$ met $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ en $\Sigma = \{a, b\}$ en $\Gamma = \{Z\}$. De functie δ voldoet aan

$$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, ZZZ)\} \text{ en } \delta(q_0, b, Z) = \{(q_1, Z)\} ,$$
$$\delta(q_1, a, Z) = \{(q_1, \varepsilon)\} \text{ en } \delta(q_1, b, Z) = \delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_2, \varepsilon)\}.$$

Alle andere waarden van $\delta(q, u, Z)$ voor $q \in Q$ en $u \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ zijn leeg. L_3 is de taal geaccepteerd door de stapelautomaat P bij lege stapel.
(a) Beschrijf de taal L_3 volledig als een verzameling van strings. Hoeveel symbolen a en b kunnen deze strings bevatten, en in welke volgorde?
(b) Beschrijf een andere stapelautomaat die dezelfde taal L_3 accepteert, maar die per stap nooit meer dan twee symbolen op de stapel zet.
(c) Geef een contextvrije grammatica die de taal L_3 voortbrengt (hetzij door middel van het standaardalgoritme, hetzij op grond van je beschrijving in onderdeel (a)).

Opgave 4 (14 %). L_4 is de taal over het alfabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ die bestaat uit alle strings die evenveel symbolen a als b bevatten. Beschrijf een eenbands Turing machine M die de taal L_4 accepteert; geef het volledige zeven-tupel.

Z.O.Z.

Opgave 5 (12 %). We beschouwen talen over een alfabet Σ en Turing machines met invoeralfabet Σ.
(a) Wanneer is een taal L *recursief opsombaar*? Geef de definitie.
(b) Wanneer is een taal L *beslisbaar* (oftewel recursief)? Geef de definitie.

Gegeven is een voorschrift T, dat voor elke string $w \in \Sigma^*$ een Turing machine $T(w)$ vast legt. Dit voorschrift voldoet aan de eigenschap, dat er voor elke Turing machine M een string w bestaat zodanig dat M and $T(w)$ dezelfde taal accepteren. Beschouw nu de taal $L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L(T(w))\}$.
(c) Is L_5 recursief opsombaar? Bewijs je bewering.
(d) Is L_5 beslisbaar? Bewijs je bewering.

Opgave 6 (18 %). Gegeven zijn de talen L_a en L_b, en deterministische eenbands Turing machines M_a en M_b waarvoor geldt $L(M_a) = L_a$ en $L(M_b) = L_b$. Concatenatie geeft de taal $L_6 = L_a L_b$.
(a) Beschrijf een nondeterministische (mogelijk meerbands) Turing machine M die voldoet aan $L(M) = L_6$. Bewijs de laatste gelijkheid.
(b) De constructie van onderdeel (a) bewijst een bewering van de vorm: "Als de talen L_a en L_b ... zijn, dan is de concatenatie $L_a L_b$ ook ...." Welke bewering is dit?